Métodos Numéricos

2do Cuatrimestre 2023

1er Parcial (25/09/2023)

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Nombre y Apellido: Agustín Azar

Libreta Universitaria: [redacted]

Total de hojas entregadas (sin enunciado): 4

Ej. 1 24	Ej. 2 16	Ej. 3 23	Ej. 4 23	Nota 86
☐ El examen se aprueba con 60 puntos. ☐ Resolver los ejercicios en hojas separadas. ☐ Completar nombre en las hojas. ☐ Completar LU y nombre en el enunciado.	**Justificar <u>todas</u> las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.			

Ejercicio 1. Sea $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Fijamos un $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ tal que $C^k x = 0$ para algún $k > 0$. Definimos:

$$r = \text{mín}\{k > 0/C^k x = 0\} \quad \text{y} \quad S = \{x, Cx, C^2x, \ldots, C^{r-1}x\}$$

Probar que:

a) (6 puntos) $S \subseteq Nu(C^r)$.

b) (12 puntos) S es linealmente independiente.

c) (8 puntos) $dim(Im(C^r)) \leqslant n - r$.

Ejercicio 2. (20 puntos) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de Hessenberg[1] y sea $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matriz que se obtiene a partir de A por el método de eliminación Gaussiana **con pivoteo parcial** cuando las primeras k columnas ya han sido trianguladas. Si $a_k := \text{máx}_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}^{(k)}|$ es el elemento máximo en módulo de la matriz $A^{(k)}$, probar que $a_k \leqslant (k+1)a_0$ para $k = 1, \ldots, n-1$.
Sugerencia: aplicar inducción en k, y suponer que al comienzo de cada paso ya se ha realizado el intercambio de filas correspondientes al pivoteo parcial.

Ejercicio 3. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donde $\forall\ z \in \mathbb{R}^n$ existen únicos $x \in Nu(A)$, $y \in Nu(B)$ tal que $z = x+y$.

a) (7 puntos) Si A es simétrica, probar que $z^tAz > 0$ para todo $z \notin Nu(A)$ si y sólo si $y^tAy > 0$ para todo $y \in Nu(B)$ no nulo.

b) (9 puntos) Demostrar que A es simétrica y $A - B$ es simétrica definida positiva si y sólo si A y B son simétricas y para todo $x \in Nu(A)$, $y \in Nu(B)$ vale que $y^tAy > x^tBx$, excepto si $x = y = 0$.

c) (11 puntos) Si $n = 2$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, demostrar que existe una matriz diagonal B y L triangular inferior con elementos de la diagonal positivos tal que $A = B + LL^t$.

Ejercicio 4. Sea $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal y sea $S(Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}$.

a) (7 puntos) Probar que $|S(Q)| \leqslant n$.
Sugerencia: usar $u = \sum_{i=1}^n e_i$, la suma de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

b) (10 puntos) Dar ejemplos de matrices de Givens G_1 y $G_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donde $|S(G_1)| = n$ y $|S(G_2)| < n$.

c) (10 puntos) Probar que si $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector con $||v||_2 = 1$ entonces $0 \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j \leqslant n$
Sugerencia: Proponer una matriz de Householder.

[1] Una matriz A es de Hessenberg si todos sus coeficientes debajo de la primera subdiagonal son nulos, es decir, si $a_{ij} = 0$ para todo (i, j) tal que $i \geqslant j + 2$.

Agustin Azar [redacted]

HOJA N° 1

FECHA 25/09

G 1)

a) ¿$S \subseteq Nu(C^r)$? $S = \{x, Cx, \dots, C^{r-1}x\}$

queremos ver que para cada elemento de S, $C^r s_i = 0$

veamos que $s_i = C^{i-1}x$ con $i = 1 \dots r-1$.

Entonces tenemos $C^r s_i = C^r C^{i-1} x = C^{r+i-1} x \overset{*}{=} C^{i-1} C^r x = C^{i-1} . 0 = 0$

(*) Esto es así debido a que el producto de matrices es asociativo

Por lo que queda demostrado $S \subseteq Nu(C^r)$

b) ¿S es LI?

~~Supongamos S no LI, es decir existe $\alpha = 0$ tq~~ $\sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i s_i = 0$

~~$= \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i C^i x = 0$~~

c) ¿$\dim(Im(C^r)) \leq n-r$?

Como S es LI y $S \subseteq Nu(C^r) \Rightarrow \dim(Nu(C^r)) \geq \#S = r$

Luego por el teorema de la dimensión

$n = \dim(Nu(C^r)) + \dim(Im(C^r))$

$\dim(Im(C^r)) = n - \dim(Nu(C^r)) \leq n - r$

b) ¿S es LI?

Supongamos S LD, es decir: existe un vector $\alpha \in \mathbb{R}^n$ $\neq 0$ tal que

$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i s_i = 0$

NOTA

Esto es lo mismo que decir:

$$\alpha_1 x + \alpha_2 C x + \alpha_3 C^2 x + \dots + \alpha_r C^{r-1} x = 0$$

~~Podemos multiplicar por C^{r-1} ambos términos de la igualdad~~

Sea α_s el primer elemento de α distinto de 0
$\alpha = (0, 0, \dots, 0, \alpha_s, \dots)$ podemos multiplicar a ambos lados de la igualdad por C^{r-s} y nos quedaría:

$$C^{r-s}(\alpha_1 x + \alpha_2 C x + \dots) = C^{r-s} 0 = 0$$

$$\underbrace{\alpha_1 C^{r-s} x + \alpha_2 C^{r+1-s} x \dots}_{\text{esto se puede poner mejor}} = 0$$

Pero todos los elementos con un C elevado a al menos r son iguales a 0 y todos los elementos con un α_i donde $i<s$ también lo son, por lo que nos queda

$$\alpha_s C^{r-1} x = 0 \text{, como } \alpha_s \neq 0$$
$$C^{r-1} x = 0 \text{, Absurdo ya que } C^k x \neq 0 \ \forall k<r$$

NOTA

Agustin Azar [redacted]

Ej 2) hagamos inducción en K

caso base K=0 : $a_0 \le (k+1) a_0 \quad a_0 \le a_0$ Vale ✓

~~Por~~ Hipotesis inductiva Sea $a_i \le (i+1) a_0 \ \forall i < K$ qvq $a_{i+1} \le (i+2) a_0$ ✓

$$A^{i} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & a_{i+1\,i+1} & & & \\ \vdots & 0 \ a_{i+2\,i+1} & \ddots & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & 0 & & \ddots \\ 0 & \cdots\ 0 & \cdots & 0 \ a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_i \le (i+1) a_0$

¿Estos dos x están relacionados?

$$A^{i+1} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & a_{i+2\,i+2} & & \\ \vdots & & 0 \ a_{i+3\,i+2} & \ddots & \\ & & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sea $a_{xy}^{(i+1)}$ tal que $|a_{xy}^{(i+1)}| = a_{i+1}$

notese que si x es distinto de $i+2$ entonces $a_{xy}^{(i+1)} = a_{xy}^{(i)}$ ya que ~~...~~ solo se modifica la fila $i+1$ en el paso i

Por lo que valdría que $a_{i+1} \le (i+2) a_0$, ya que $a_{i+1} = a_i \le (i+1) a_0 \le (i+2) a_0$

pues $a_0 \ge 0$

En el caso de que $x = i+2$:

Sabemos que:

$$a_{xy}^{(i+1)} = a_{xy}^{(i)} + \frac{a^{(i)}_{x\,i+1}}{a^{(i)}_{i+1\,i+1}} \ a^{(i)}_{i+1\,y}$$

qvq:

$|a_{xy}^{(i+1)}| \le (i+2) a_0$

$$|a_{xy}^{(i+1)}| \le |a_{xy}^{(i)}| + \underbrace{\left|\frac{a^{(i)}_{x\,i+1}}{a^{(i)}_{i+1\,i+1}}\right|}_{\le 1 \text{ ¿por qué?}} \underbrace{|a^{(i)}_{i+1\,y}|}_{\le a_i}$$

¿qué pasa si hubiera que haber hecho pivoteo parcial y haber intercambiado filas?

Pero como la matriz es una matriz de Hessemberg, ya mencionamos que en cada paso solo se modifica una fila, ~~...~~ y no se repite la fila que se modifica, por lo que la fila x es igual que al principio

y $a_{xy}^{(i)} = a_{xy}^{(0)}$ y nos queda

↳ ¿cuál es este x? ¿$i+2$? (ver

¿¿y si x es $i+1$??

$|a_{xy}^{(i+1)}| \le |a_{xy}^{0}| + a_i \le a_0 + (i+1) a_0 = (i+2) a_0$

Por lo que la cota vale

B=

quedaría por ver, por determinado

submatriz [illegible] siendo de Hessenberg

Agustín Azar [redacted] HOJA N° 3

FECHA 25/09

Ej 3)

a) qvq A simetrica $\Rightarrow \left(z^t A z > 0 \ \forall z \notin Nu(A) \Leftrightarrow y^t A y > 0 \ \forall y \in Nu(B), y \neq 0 \right)$

$\Rightarrow)$ $z^t A z > 0 \Rightarrow (x^t + y^t) A (x+y) > 0 \Rightarrow (x^t + y^t)(\underset{0}{Ax} + Ay) > 0$

$\Rightarrow (x^t + y^t) . Ay > 0$

$\Rightarrow x^t A y + y^t A y > 0$ Pero como A es simetrica $(x^t A y)^t = y^t A^t x = y^t A x = 0$

$\Rightarrow y^t A y > 0 \ \forall y$

¿Relación $z \notin Nu(A)$ $y \neq 0$?

$\Leftarrow)$ $y^t A y > 0 \quad \forall y \in Nu(B) \wedge y \neq 0$

~~Veamos que A es simetrica~~ $\cancel{(y^t A y)^t = y^t A^t y = y^t A y \Leftrightarrow A = A^t}$

qvq $\cancel{z^t A z}$ $z^t A z > 0$

$(x^t + y) A (x+y) = (x^t + y^t)(\underset{0}{Ax} + Ay) = x^t A y + y^t A y$; Como A es simetrica $x^t A y = (x^t A y)^t = y^t A x = 0$

$= y^t A y > 0$ y por lo tanto vale que $z^t A z > 0$

b) (A es sim y A-B es sdp) $\Leftrightarrow$ (A y B simetricas y $\forall x \in Nu(A), y \in Nu(B)$ $y^t A y > x^t B x$)

$\Rightarrow$ Sea $z = (x+y)$ sabemos $z^t (A-B) z > 0 \ \forall z \neq 0$

$(x+y)^t (A-B)(x+y) = (x^t + y^t)(\underset{0}{Ax} + Ay - Bx - \underset{0}{By}) = x^t A y + y^t A y - x^t B x - y^t B x$

Entonces tenemos:

$x^t A y + y^t A y - x^t B x - y^t B x > 0$ Como A es simetrica $x^t A y = y^t A x = 0$

$y^t A y - y^t B x > x^t B x$

Pero como A-B es simetrica y A es simetrica entonces:

$(A-B) = (A-B)^t$

$A - B = A - B^t$

$B = B \Rightarrow$ Por lo que $y^t B x = (y^t B x)^t = x^t B y = 0$ $y \in Nu(B)$

Por lo que nos queda

$y^t A y > x^t B x$

NOTA

$\Leftarrow$) A y B simétricas y $y^tAy > x^tBx$ qvq A es simétrica y $A-B$ sdp

• A es simétrica $\square$

¿$A-B$ es sdp?

$A-B \stackrel{?}{=} (A^t-B)^t$; $(A-B)^t = A^t - B^t = A-B$, por lo que $A-B$ es simétrica ✓

ahora qvq $\forall\, z = x+y$ $\; z^t(A-B)z > 0$ si $z \neq 0$, $x \in Nu(A)$, $y \in (Nu(B))$

$z^t(A-B)z$

$= (x+y)^t(A-B)(x+y) = (x^t+y^t)(A\overset{=0}{x} + Ay - Bx - B\overset{=0}{y}) = x^tAy + y^tAy - x^tBx - y^tBx$

Como A y B son simétricas:

$= \underset{0}{y^tAx} + y^tAy - x^tBx - \underset{0}{x^tBy} = y^tAy - x^tBx$, pero como $y^tAy > x^tBx$

¿($x \neq 0$ $y=0$ ó y $x=0$ vs $z=0$)?

~~y^tAy~~ $z^t(A-B)z = y^tAy - x^tBx > 0$ ✓

c) Existe $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ya que $LL^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ¡Magia!

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ~~¿Y por qué funciona?~~

NOTA

Agustín Azar [redacted] $\frac{23}{27}$

HOJA N° 4

FECHA 25/09

ej 4)

a) qvq $|S(Q)| \leq n$ Sea $u = \sum_{i=1}^{n} e_i$ nemos que

$\cancel{|S(Q)| = |\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}|}$ $Qu = \begin{pmatrix} \sum_{i=1} a_{1i} \\ \sum a_{2i} \\ \vdots \\ \sum a_{ni} \end{pmatrix} = \hat{u}$

por lo que si hacemos ahora:

$u^t \hat{u} = S(Q)$ Por lo que buscamos

$|u^t \hat{u}|$

Por desigualdad de Cauchi Schwartz

$|u^t \hat{u}| \leq \|u\|_2 \cdot \|\hat{u}\|_2$

donde $\|u\|_2 = \sqrt{n}$

y $\|\hat{u}\|_2 = \|Qu\|_2 = \|u\|_2 = \sqrt{n}$

Por lo que

$|u^t \hat{u}| = |S(Q)| \leq n$ ✓

b) Para G_1 busco $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

donde $|\cos\theta \cancel{+ \operatorname{sen}\theta} \cancel{- \operatorname{sen}\theta} + \cos\theta| = 2$

$|2\cos\theta| = 2$ $\cos(\theta) = -1$

$|\cos\theta| = 1 \xrightarrow{?} \cos(\theta) = 1$

Por lo que G_1 puede ser:

$G_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ OK Pero el enunciado pedía para un n generico

Para G_2: $|\cos\theta| < 1$ tomo $\theta = 60$ y $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$

$G_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

NOTA

c) QVQ $0 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i v_j \leq n$

Veamos que esto es igual a aplicar la funcion S a VV^t
Por lo que por el enunciado a es lo mismo que $u^t V V^t u$
Sea Q una matriz ortogonal, puedo insertar Q en mi formula de forma que

$u^t V V^t u = u^t V I V^t u = u^t V Q Q^t V^t u$ y esto es igual a

$(Q^t V^t u)^t Q^t V^t u = \|Q^t V^t u\|_2^2 \leq (\|Q^t V^t\|_2^2 \cdot \|u\|_2^2) = \|V^t\|_2^2 \cdot \|u\|_2^2$
pero por enunciado $\|v\|_2 = 1$ por lo que nos queda

$\|V^t\|_2^2 \|u\|_2^2 = \sqrt{n}^2 = n$ por lo que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i v_j \leq n$

y si volvemos a ⊛ por ser una norma esto es ≥ 0
por lo que $\boxed{0 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i v_j \leq n}$ ✓

NOTA